ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 161

Α4. **α.** Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

δ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Πρέπει: $\left.\begin{matrix} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$,.άρα: $D_{f \circ g} = [0,1]$.

Ακόμα: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x) = 2(x-1) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα δηλ.είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

Θέτω $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y} = |x-1| \overset{x-1 \leq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y} = -x+1 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$,άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, x \in [0,1]$.

Β3. i) Είναι: $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και ισχύει ότι:

$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$,άρα η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ακόμα $\varphi(0)\neq\varphi(1)$ ($\varphi(0)=1$) άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Επειδή η φ ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών τότε για κάθε αριθμο η ανάμεσα στο $[0,1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Επειδή $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\uparrow(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$ ισχύει.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και ισχύει ότι $f'(x)=-2$ για κάθε $x<-1$ τότε:

$$f'(x)=-2\Leftrightarrow f'(x)=(-2x)'\Leftrightarrow f(x)=-2x+c, x\leq -1 \ (1)$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=3x^2-1$, για κάθε $x>-1$ οπότε

$$f'(x)=3x^2-1\Leftrightarrow f'(x)=(x^3-x)'\Leftrightarrow f(x)=x^3-x+c_2, x>-1 \ (2)$$

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το O(0,0) τότε

$$f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0^3-0+c_2\Leftrightarrow 0=c_2$$

Άρα από (2) $f(x)=x^3-x\,, x>-1$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $x_0=-1$,άρα

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}(-2x+c_1)=\lim_{x\to -1^+}(x^3-x)=2+c_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+c_1=0\Leftrightarrow c_1=-2$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & ,x\le -1\\ x^3-x & ,x>-1\end{cases}$

Γ2.

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ με $x_0>-1$ θα δίνεται από τον τύπο :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow$$

$$y-({x_0}^3-x_0)=(3{x_0}^2-1)(x-x_0)\Rightarrow$$

$$y=(3{x_0}^2-1)x-3{x_0}^3+x_0+{x_0}^3-x_0\Rightarrow$$

$$y=(3{x_0}^2-1)x-2{x_0}^3$$

και αφού τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο

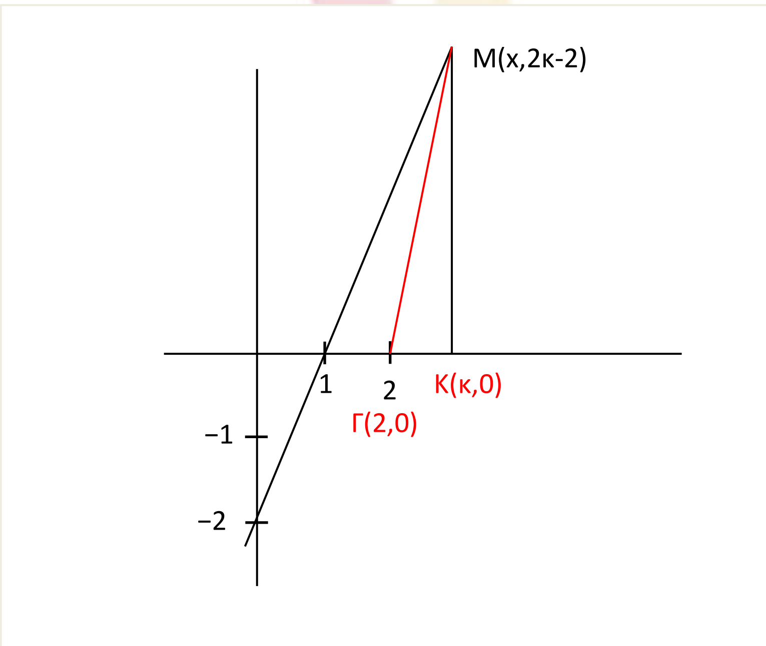
Και αφού τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο με τεταγμένη -2 τότε:

$-2=(3x_0^2-1)\cdot 0-2x_0^3\Leftrightarrow -2=-2x_0^3\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1$

Άρα η εφαπτομένη θα είναι:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2$$

Γ3.



Την χρονική στιγμή t_0 το κινητό διέρχεται από το (3,4). Δηλαδή $x(t_0) = 3 \; και \; y(t_0) = 4$. Επίσης

$x'(t_0) = 2 \, {}^{m}/_{sec}$.

Ισχύει: $E = \frac{1}{2}\, \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2}|x-2| \cdot |2x-2| \overset{x>2}{=} \frac{1}{2}(x-2)\cdot(2x-2) = (x-2)\cdot(x-1) = x^2 - 3x + 2$

Άρα $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2 \Leftrightarrow E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t) \Leftrightarrow E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) \Leftrightarrow E'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 6 \, {}^{m^2}/_{sec}$

Γ4.

Θα υπολογίσουμε το : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Θέτω την $f(x) = u$ και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2) = +\infty$ τότε και

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu u}{u}$ =0 γιατί :

Για $u \neq 0$ $\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| = |\eta\mu u|\left|\frac{1}{u}\right| \leq \left|\frac{1}{u}\right|$ οπότε : $-\frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{u} = 0$

από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu u}{u}$ =0

Επίσης: θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$

Θέτω $-x = y$ οπότε αφού $x \to -\infty$ τότε $y \to +\infty$ και θα έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \overset{\substack{-x=y \\ x=-y}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(y)}{1-(-y)^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{y^3-y}{1+y^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{y^3}{y^3} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu(f(x)}{f(x)} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = 0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. i) Για κάθε $x \in D_f = (0,+\infty)$ είναι $f(x) = x - (\ln 3 + \ln x) = x - \ln x - \ln 3$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-1}{x}$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $x > 0 \quad (1)$

Έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
f		↘	ο.ε.	↗	

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1 - \ln 3$

Έστω $\Delta_1 = (0,1]$ και $\Delta_2 = [1,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - \ln x - \ln 3) = 0 - (-\infty) - \ln 3 = +\infty$

$f(1) = 1 - \ln 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \overset{\text{συνεχής}}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 - \ln 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x - \ln 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln 3}{x} \right) \right] = +\infty$ διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Έχουμε την εξίσωση $f(x)=0 \quad (2)$ και η f είναι συνεχής στα διαστήματα Δ_1

και Δ_2.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , άρα:

$$f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , άρα:

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1-\ln 3,+\infty)$$

$0\in f(\Delta_1)$ άρα η (2) έχει ρίζα x_1 στο Δ_1 και μάλιστα μοναδική διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

$0\in f(\Delta_2)$ άρα η (2) έχει ρίζα x_2 στο Δ_2 και μάλιστα μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Τελικά η (2) έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ αφού $\begin{pmatrix} x_1\in\Delta_1 \\ x_2\in\Delta_2\end{pmatrix}$

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη και $f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Είναι $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$

Για κάθε $x\in[x_1,1]\subseteq\Delta_1$ είναι $x\geq x_1 \overset{\text{f γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_1}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(x_1)\Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Για κάθε $x\in[1,x_2]\subseteq\Delta_2$ είναι $x\geq x_1 \overset{\text{f γνησίως αύξουσα στο } \Delta_2}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(x_2)\Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Άρα $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ οπότε:

$$E=\int_{x_1}^{x_2}(-f(x))dx=\int_{x_1}^{x_2}(\ln x+\ln 3-x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\ln x\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\ln 3\,dx-\int_{x_1}^{x_2}x\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln x\,dx+\ln3(x_2-x_1)-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=[x\ln x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x(\ln x)'\,dx+(x_2-x_1)\ln3-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$=x_2\ln x_2-x_1\ln x_1-\int_{x_1}^{x_2}\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx+(x_2-x_1)\ln3-\left(\frac{x_2{}^2}{2}-\frac{x_1{}^2}{2}\right)=$$

$$\overset{\int_{x_1}^{x_2}1dx=1(x_2-x_1)}{=}\quad x_2\ln x_2-x_1\ln x_1-(x_2-x_1)+x_2\ln3-x_1\ln3-\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{2}=$$

$$=x_2(\ln x_2+\ln3)-x_1(\ln x_1-\ln3)-\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{2}-(x_2-x_1)$$

Είναι: $f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-\ln x_1-\ln3=0\Leftrightarrow x_1=\ln x_1+\ln3$

$f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2-\ln x_2-\ln3=0\Leftrightarrow x_2=\ln x_2+\ln3$

Άρα $E=x_2\cdot x_2-x_1\cdot x_1-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=x_2^2-x_1^2-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{2}=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)}{2}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Έχουμε $x_1<1\Leftrightarrow -x_1>-1\Leftrightarrow 2-x_1>1$

Ισχύει: $E>0\overset{\frac{1}{2}(x_2-x_1)>0}{\Leftrightarrow}x_1+x_2-2>0\Leftrightarrow x_1+x_2>2\Leftrightarrow$

$x_2>2-x_1\Leftrightarrow 2-x_1<x_2$

Άρα $2-x_1\in(x_1,x_2)$

Γνωρίζουμε ότι $f(x)\le0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\begin{pmatrix}x=x_1\\x=x_2\end{pmatrix}$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ οπότε $f(2-x_1)<0$

Δ4. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \quad (3)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ διότι η θέση του ελαχίστου είναι μοναδική.

Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_2, f(x_2))$

Είναι $\varepsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένως για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \quad (4)$

Και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$

Έχουμε την εξίσωση:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 + \ln 3 = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \quad (5)$$

Λόγω των (3) και (4) έχουμε $\begin{cases} f(x) - 1 + \ln 3 \geq 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \leq 0 \end{cases}$

Άρα η (5) ισχύει αν και μόνο αν:

$\begin{cases} f(x) - 1 + \ln 3 = 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases}$ ΑΔΥΝΑΤΟ διότι $1 < x_2$ άρα $1 \neq x_2$

Άρα η (5) αδύνατη

Επιμέλεια απαντήσεων: Δελενίκα Μαρία, Τσίμος Βασίλειος, Κανελλόπουλος Γεώργιος, Βερέμης Δημήτριος, Αγοργιανίτης Ιωάννης, Μπαρπαρή Νεφέλη